# Serreの定理の一般化について (Cousin問題について)



毛織, 泰子

数理解析研究所講究録
141巻 1972年 108-140



# Serreの定理の一般化について

九大 理　毛織 泰子

## §1. 序

Cartan - Serre [8] の基本定理Bによれば Stein 空間 $\Omega$ 上の任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対して $H^q(\Omega, \mathcal{F}) = 0$ $(q \geqq 1)$ が成り立つ。

又、Serre [8] は、逆に、$\mathbb{C}^n$ の領域 $\Omega$ が、正則関数の芽の層 $\mathcal{O}$ に対して $H^q(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ $(1 \leqq q \leqq n-1)$ を満たせば、$\Omega$ は正則領域であると述べている。

これに対して、Laufer [6] は Stein 多様体の開集合 $\Omega$ の正則包を $E(\Omega)$ とするとき、$H^q(\Omega, \mathcal{O})$ $(1 \leqq q \leqq n-1)$ が、$E(\Omega)$ 内の、$\Omega$ の境界点を決定するという結果を え、更に、Stein 多様体上の Riemann領域 $\Omega$ で、$\Omega$ 上の正則関数が $\Omega$ の点を分離するものに対して、複素線形空間 $H^q(\Omega, \mathcal{O})$ $(1 \leqq q \leqq n-1)$ が有限次元 ( Andreotti - Grauert [1] 参照。)であれば、$\Omega$ は Stein 多様体であるという形に Serre の定理を精密化し、更に、$\Omega$ 上の正則関数が

$\Omega$ の点を分離すれば $\Omega$ は Stein 多様体の部分領域である。

他方. Kajiwara-Kazama [5] は. 一般の Cousin 問題を考え、ある複素 Lie 群 L に対して. L に値をもつ正則写像の芽の層を $\mathcal{O}_L$ で表わすとき. 2次元 Stein 多様体の領域 $\Omega$ が $H^1(\Omega, \mathcal{O}_L)=0$ を満たせば、$\Omega$ は Stein 多様体であるという結果を得. Cartan-Behnke-Stein の定理の一つの拡張を与えた。なお. 論文[5] は未刊行なので、講究録のこの巻の梶原壌二[4] を参照されたい。

本講演の目的は. $n$ 次元の Stein 多様体の領域 $\Omega$ が. ある複素 Lie 群 L に対して $H^1(\Omega, \mathcal{O}_L)=0$, $H^q(\Omega, \mathcal{O})=0$ $(2 \leq q \leq n-1)$ を満たせば、$\Omega$ は Stein 多様体であるという講演者がえた最近の結果を紹介することにある。これは. 上記の Serre の定理と Kajiwara-Kazama の定理の双方の一般化になっている。証明の道筋は、Laufer の方法を用いて、Kajiwara-Kazama [5] の結果に帰着させ、$\Omega$ の擬凸性を示し. Docquier-Grauert [3] の結果を用いて $\Omega$ が Stein 多様体であることを示す。

## §2. Laufer の結果

$n$ 次元複素数空間 $\mathbb{C}^n$ に於て，次のような開集合を考える：適当な正数 $r>0$ に対して

$$\Delta(0;r) \equiv \{ z\in\mathbb{C}^n \mid |z_i|<r \ (1\leq i\leq n)\},$$

$$U_i \equiv \{ z\in\Delta \mid z_i\neq 0\} \quad (1\leq i\leq n).$$

このとき $\mathfrak{U}\equiv\{U_i \mid 1\leq i\leq n\}$ は $\Delta-0$ の Stein 開被覆である。

$C^\infty$-$(0,q)$ 型式の芽の層を $\mathcal{E}^{0,q}$ で表わすとき，完全列：

$$0\to\mathcal{O}\xrightarrow{\varepsilon}\mathcal{E}^{0,0}\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{E}^{0,1}\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{E}^{0,q}\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{E}^{0,q+1}\xrightarrow{\bar\partial}\cdots$$

は，$\mathcal{O}$ の整備層による分解を与え，次のような二重複体の可換図が得られる：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to & \Gamma(\Delta-0,\mathcal{O}) & \xrightarrow{\varepsilon^*} & \Gamma(\Delta-0,\mathcal{E}^{0,0}) & \xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial} & \Gamma(\Delta-0,\mathcal{E}^{0,n-1}) & \xrightarrow{\bar\partial}\cdots \\
 & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i & \\
0\to & C^0(\mathfrak{U},\mathcal{O}) & \xrightarrow{\varepsilon^*} & C^0(\mathfrak{U},\mathcal{E}^{0,0}) & \xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial} & C^0(\mathfrak{U},\mathcal{E}^{0,n-1}) & \xrightarrow{\bar\partial}\cdots \\
 & \downarrow \delta_0 & & \downarrow \delta_0 & & \downarrow \delta_0 & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow \delta_{n-2} & & \downarrow \delta_{n-2} & & \downarrow \delta_{n-2} & \\
0\to & C^{n-1}(\mathfrak{U},\mathcal{O}) & \xrightarrow{\varepsilon^*} & C^{n-1}(\mathfrak{U},\mathcal{E}^{0,0}) & \xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial} & C^{n-1}(\mathfrak{U},\mathcal{E}^{0,n-1}) & \xrightarrow{\bar\partial}\cdots \\
 & \downarrow \delta_{n-1} & & \downarrow \delta_{n-1} & & \downarrow \delta_{n-1} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array} \tag{2.1}$$

ここで

$$r^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z}_i \quad ,$$

$$\alpha(i_1, \dots, i_m) \equiv \frac{(m-1)!}{r^{2m}} \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \bar{z}_{i_j}\, d\bar{z}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{z}_{i_j}} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{i_m} \,,$$

とおけば、$\alpha$ は歪対称であり、$\alpha(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma(\Delta - 0, \mathcal{E}^{0,m-1})$。
但し、$\wedge$ は $d\bar{z}_{i_j}$ を除くことを意味する。このとき、

$$\bar{\partial}\alpha(i_1, \dots, i_m) = \sum_{k} z_k \alpha(k, i_1, \dots, i_m)$$

が成立し、特に

$$\bar{\partial}\alpha(1, \dots, n) = 0$$

である。

$$g \equiv \frac{1}{z_1 \cdots z_n}$$

なる関数を考えると、これは $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ 上の正則関数であるから、開被覆 $\mathfrak{U}$ に関する $n-1$ 次元の $\mathcal{O}$ 係数のコサイクルを定義する。更に

$$g_\nu(U_1 \cap \cdots \cap \hat{U}_{i_1} \cap \cdots \cap \hat{U}_{i_\nu} \cap \cdots \cap U_n) \equiv (-1)^{\nu-1+i_1+\cdots+i_\nu} \frac{\alpha(i_1, \dots, i_\nu)}{z_1 \cdots \hat{z}_{i_1} \cdots \hat{z}_{i_\nu} \cdots z_n}$$

$$(1 \leq \nu \leq n)$$

とおけば、$1 \leqq \nu \leqq n-1$ に対して

$$g_\nu \in C^{n-\nu-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{0,\nu-1}), \qquad \varepsilon^* g = \delta_{n-2}\, g_1, \qquad \bar\partial g_\nu = \delta_{n-\nu-1}\, g_{\nu+1}$$

であり、$n' \equiv n-1 + \frac{1}{2}n(n+1)$ とおくとき、

$$g_n = (-1)^{n'} \alpha(1, \cdots, n) \in \Gamma(\Delta - 0, \mathcal{E}^{0,n-1}), \qquad \bar\partial g_{n-1} = i\, g_n$$

である。

可換図 (2.1) で、Dolbeault の同型:

$$H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \approx \frac{\operatorname{Ker}[\Gamma(\Delta - 0, \mathcal{E}^{0,q}) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma(\Delta - 0, \mathcal{E}^{0,q+1})]}{\bar\partial\, \Gamma(\Delta - 0, \mathcal{E}^{0,q-1})} \quad (q \geqq 0)$$

を具体的にたどれば、$g \in Z^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ の代表するコホモロジー類には、$\bar\partial$-閉型式 $(-1)^{n'}\alpha(1, \cdots, n) = g_n \in \Gamma(\Delta - 0, \mathcal{E}^{0,n-1})$ の類が対応する。

同様に、

$$g = \sum_{\nu=1}^{r} \frac{a_\nu}{z_1 \cdots z_{n-1} z_n^{\nu}} \in \Gamma(U_1 \cap \cdots \cap U_n, \mathcal{O}) = Z^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$$

$(a_r \neq 0)$ に対応する $\bar\partial$-閉型式を $\alpha_g(1, \cdots, n) \in \Gamma(\Delta - 0, \mathcal{E}^{0,n-1})$ で表わす。

Stein 多様体 $S$ の1点 $P$ に対して、$\Delta$ を $P$ の $S$ に於ける適当な多重円板近傍とする。このとき、次

のような Mayer-Vietoris 完全列が得られる：

$$\cdots \to H^q(S, \mathcal{O}) \to H^q(S-P, \mathcal{O}) \oplus H^q(\Delta, \mathcal{O}) \to H^q(\Delta - P, \mathcal{O}) \to H^{q+1}(S, \mathcal{O}) \to \cdots$$

$q \geq 1$ のとき．Cartan の定理 B から $H^q(S, \mathcal{O}) = H^{q+1}(S, \mathcal{O}) = 0$,
$H^q(\Delta, \mathcal{O}) = 0$ であるから．次の同型を得る：

(2.2) $$H^q(S-P, \mathcal{O}) \approx H^q(\Delta - P, \mathcal{O}) \quad (q \geq 1).$$

(2.3) <u>補題</u> $\bar\partial$-閉型式 $\alpha g(1, \cdots, n) \in \Gamma(\Delta - P, \mathcal{E}^{0, n-1})$
に対して、次の性質をもつ $\alpha g^*(i_1, \ldots, i_m, n) \in \Gamma(S - P, \mathcal{E}^{0, m})$
$(0 \leq m \leq n-1)$ が存在する：

1) $\alpha g^*$ は歪対称である。

2)
$$\bar\partial \alpha g^*(1, \cdots, n-1, n) = 0$$

3) (2.2) の同型で $[\alpha g^*(1, \cdots, n)] \in H^{n-1}(S-P, \mathcal{O})$ は
$[\alpha g(1, \cdots, n)] \in H^{n-1}(\Delta - P, \mathcal{O})$ に対応する。

4)
$$\bar\partial \alpha g^*(i_1, \cdots, i_m, n) = \sum_k z_k \alpha g^*(k, i_1, \cdots, i_m, n).$$

証明． $1 \leq k \leq n-1$ に対して $z_k \alpha g^*(1, \cdots, n)$ は
$\displaystyle\sum_{\nu=1}^{r} \frac{a_\nu}{z_1 \cdots \hat{z}_k \cdots z_{n-1} z_n^\nu} \in \check{\mathfrak{z}}^{n-2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ に対応するから完全型式

である。従って

$$z_k\, \alpha_g^*(k, 1, \dots, \hat{k}, \dots, n) = \bar\partial\, \alpha_g^*(1, \dots, \hat{k}, \dots, n)$$

を満たす $\alpha_g^*(1, \dots, \hat{k}, \dots, n) \in \Gamma(S-P, \mathcal{E}^{0,n-2})$ が存在する。

$q \leq n-2$ のとき、Scheja [7] により $H^q(S-P, \mathcal{O}) \approx H^q(S, \mathcal{O})$ であるから、Cartan の定理 B により $H^q(S-P, \mathcal{O}) = 0$ $(1 \leq q \leq n-2)$.

$1 \leq j < k \leq n-1$ に対して、$\bar\partial$-閉型式 $z_j\, \alpha_g^*(j, 1, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{k}, \dots, n) + z_k\, \alpha_g^*(k, 1, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{k}, \dots, n)$ は $H^{n-2}(S-P, \mathcal{O}) = 0$ だから完全型式である。従って

$$z_j \alpha_g^*(j, 1, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{k}, \dots, n) + z_k\, \alpha_g^*(k, 1, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{k}, \dots, n) = \bar\partial\, \alpha_g^*(1, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{k}, \dots, n)$$

を満たす $\alpha_g^*(1, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{k}, \dots, n) \in \Gamma(S-P, \mathcal{E}^{0,n-3})$ が存在する。

以下同様にして、4) を満たすように $\{\alpha_g^*(i_1, \dots, i_m, n) \mid 0 \leq m \leq n-1\}$ が構成できる。(証明終)

特に $g = \dfrac{(-1)^{n'}}{z_1 \cdots z_n}$ のとき、$\alpha$ と $\alpha^*$ の間には、$\Delta - P$ 上で次の恒等式が成り立つ:

(2.4 ; m) $\quad \bar\partial\, \alpha^*(i_1, \dots, i_m, n)$

$$= \bar\partial\, \alpha(i_1, \dots, i_m, n) + \sum_k z_k\, \bar\partial \beta(k, i_1, \dots, i_m, n) \quad (0 \leq m \leq n-1),$$

$$\alpha^*(i_1,\dots,i_m,n) = \alpha(i_1,\dots,i_m,n) + \sum_k z_k \beta(k,i_1,\dots,i_m,n)$$

$$+ \bar\partial \beta(i_1,\dots,i_m,n) \quad (1 \leqq m \leqq n-1),$$

ここで $\beta$ は $\Delta - P$ 上の適当な $C^\infty$-歪対称型式である。

Stein 多様体 $S$ の開集合 $\Omega$ に対して $\partial\Omega$ の1点 $P$ を原点とする局所座標系を一つ取る。$\Delta$ を $0$ の $S$ に於ける多重円板近傍とし

$$V \equiv \{ z_1 = \cdots = z_{n-1} = 0 \}$$

とおく。

$2 \leqq w \leqq n$ に対して

$$K \equiv \{k_1,\dots,k_{w-1}\} \subset \{1,2,\dots,n-1\},$$

$$K_j \equiv \{k_1,\dots,\hat{k}_j,\dots,k_{w-1}\},\ K_{j,\ell} \equiv \{k_1,\dots,\hat{k}_j,\dots,\hat{k}_\ell,\dots,k_{w-1}\},\dots$$

とおく。

(2.5) <u>補題</u>　補題(2.3)の $\{\alpha g^*(i_1,\dots,i_m,n)\}$ に対して、

次の性質をもつ $\omega_{n-w}(K_j) \in \Gamma(\Omega, \mathcal{E}^{0,n-w})$ が存在すると仮定する：

i) $\omega$ は歪対称である。

ii)

$$\bar{\partial}\, \omega_{n-2}(\phi) = \alpha_g^*(1, \cdots, n-1, n)$$

iii) $$\gamma(K) \equiv \sum_{j=1}^{w-1} (-1)^j z_{k_j} \omega_{n-w}(K_j) - (-1)^{w+k_1+\cdots+k_{w-1}} \alpha_g^*(1, \cdots, \hat{K}, \cdots, n)$$

とするとき，

$$\bar{\partial}\, \omega_{n-w-1}(K) = \gamma(K) \qquad (2 \leq w \leq n-1).$$

このとき $\Lambda g \equiv \gamma(1, \cdots, n-1) \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ に対して，次のような $\Gamma_g \in \Gamma(\Delta, \mathcal{O})$ が存在する：

1)

$$\Gamma_g(0) \neq 0$$

2) $\Omega \cap \Delta \cap V$ 上で

$$\Lambda g(0, \cdots, 0, z_n) = \frac{1}{z_n^r} \Gamma_g(0, \cdots, 0, z_n)$$

が成り立つ。

更に，$2 \leq w \leq s \leq n-1$ に対して，iii) を満たす $\omega_{n-w}(K_j)$ が存在するならば，$2 \leq w \leq s+1$ に対して

$$\bar{\partial}\gamma(K) = 0$$

となる。

証明. 先に後半を示す。 $w=2$ のとき. (2.3), 4) 及び (2.5), ii) より

$$\bar{\partial}\gamma(k_1) = -z_{k_1}\alpha g^*(1,\cdots,n) - (-1)^{2+k_1} z_{k_1}\alpha g^*(k_1,1,\cdots,\hat{k}_1,\cdots,n)$$

( $\alpha g^*$ は歪対称 )

$$= 0 .$$

$w>2$ のとき. (2.3), 4) 及び (2.5), iii) より

$$\bar{\partial}\gamma(K) = \sum_j (-1)^j z_{k_j}\gamma(K_j) - (-1)^{w+k_1+\cdots+k_{w-1}} \sum_{j=1}^{w-1} z_{k_j}\alpha g^*(k_j,1,\cdots,\hat{K},\cdots,n)$$

( $\gamma(K_j)$ に於て $\omega$ を含む項 $=0$ )

$$= \sum_j (-1)^j z_{k_j} (-1)^{w+k_1+\cdots+\hat{k}_j+\cdots+k_{w-1}} \alpha g^*(1,\cdots,\hat{k}_j,\cdots,n)$$

$$- (-1)^{w+k_1+\cdots+k_{w-1}} \sum_j z_{k_j}\alpha g^*(k_j,1,\cdots,\hat{K},\cdots,n)$$

$$\left( \alpha g^*(1,\cdots,\hat{k}_j,\cdots,n) = (-1)^{k_j-j}\alpha g^*(k_j,1,\cdots,\hat{K},\cdots,n) \right)$$

$$= 0 .$$

前半を示す。 $\bar{\partial}\Lambda_q = \bar{\partial}\gamma(1,\cdots,n-1) = 0$ だから

$\Lambda_g \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$. 又. $n'' \equiv n+1+\frac{1}{2}n(n-1)$ とおくとき

$$\Lambda_g(0, \cdots, 0, z_n) = (-1)^{n''} \alpha_g^*(n)(0, \cdots, 0, z_n)$$

$$= (-1)^{n'+n''} \left( \sum_{\nu=1}^{r} \frac{a_\nu}{z_n^{\nu-1}} \right) \alpha^*(n).$$

ここで

$$\Phi(z) \equiv \alpha^*(n) - \alpha(n) - \sum_{\nu=1}^{n-1} z_\nu \beta(\nu, n)$$

とおけば. 恒等式 (2.4 ; 0) から $\bar\partial \Phi = 0$ だから $\Phi \in \Gamma(\Delta - 0, \mathcal{O})$。 $n \geqq w \geqq 2$ だから $0$ は除去可能な特異点である。故に $\Phi$ の拡張 $\hat{\Phi} \in \Gamma(\Delta, \mathcal{O})$ が存在する. そこで

$$\Gamma_g(z) \equiv (-1)^{n'+n''} \left( \sum_{\nu=1}^{r} a_\nu z_n^{r-\nu} \right) \left( z_n \hat{\Phi}(z) - 1 \right)$$

と定義すれば

$$\Gamma_g \in \Gamma(\Delta, \mathcal{O}), \quad \Gamma_g(0) = (-1)^{1+n'+n''} a_r \neq 0,$$

更に $\Omega \cap \Delta \cap V$ 上で

$$\Lambda_g(0, \cdots, 0, z_n) = \frac{1}{z_n^r} \Gamma_g(0, \cdots, 0, z_n)$$

を満たす。(証明終)

(2.6) 定理　Stein 多様体 $S$ の開集合 $\Omega$ の任意の境界点 $p\in\partial\Omega$ に対して、$p\notin E(\Omega)$ なる為の必要十分条件は、$p$ の近傍に於ける座標の、任意の正則一次変換に対して、適当な $q$ に対応する、補題 (2.5) の $\{\omega_{n-w}(k_j)\in\Gamma(\Omega,\mathcal{E}^{0,n-w})\}$ が存在することである。

証明.（必要性）　$p\notin E(\Omega)$ だから $E(\Omega)\subset S-p$. $E(\Omega)$ は Stein 多様体だから、Cartan の定理 B により、$\bar\partial$-閉型式 $dq^*(1,\cdots,n)|_{E(\Omega)}\in\Gamma(E(\Omega),\mathcal{E}^{0,n-1})$ は完全型式である。従って、(2.5), ii) を満たす $\omega_{n-2}(\phi)\in\Gamma(E(\Omega),\mathcal{E}^{0,n-2})$ が存在する。そこで、補題 (2.5) のように $\gamma$ を定義すれば後半から、これは $\bar\partial$-閉型式になる。従って、再び Cartan の定理 B から、(2.5), iii) を満たす $\omega$ が $E(\Omega)$ 上に存在する。この操作を続けて得られた $\omega$ を $\Omega$ 上に制限すればよい。

（十分性）　$p\in E(\Omega)$ と仮定すれば、$p$ の、$E(\Omega)$ に含まれる適当な多重円板近傍 $\Delta$ に対して、$p\in\partial\Omega$ だから $\Omega\cap\Delta\ni q$ が存在する。補題 (2.5) の $\Lambda_q\in\Gamma(\Omega,\mathcal{O})$ は拡張 $\hat\Lambda_q\in\Gamma(E(\Omega),\mathcal{O})$ をもつ。座標の正則一次変換により、

$$p=0\quad,\quad\overline{pq}\subset V=\{z_1=\cdots=z_{n-1}=0\}$$

とできる。 $\Omega \cap \triangle \cap V\ (\neq \phi)$ 上で

$$\hat{\Lambda}_g(0,\cdots,0,z_n) = \Lambda_g(0,\cdots,0,z_n) = \frac{1}{z_n{}^r}\,\Gamma_g(0,\cdots,0,z_n)$$

が成り立ち、 $\Gamma_g(0) \neq 0$ だから、 $z_n = 0$ は、 $\hat{\Lambda}_g(0,\cdots,0,z_n)$ の極である。従って、 $\hat{\Lambda}_g$ も $P(z=0)$ で正則ではありえない。これは $P \in E(\Omega)$ に矛盾する。(終)

(2.7) <u>定理</u> $\Omega$ を Stein 多様体上の $n$ 次元 Riemann 領域で $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ が $\Omega$ の点を分けるものとする。このとき、 $\dim H^q(\Omega, \mathcal{O}) < +\infty$ $(1 \leq q \leq n-1)$ ならば、 $\Omega$ は Stein 多様体である。

証明、 $\Omega$ が Stein 多様体でないと仮定すれば、 $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ が $\Omega$ の点を分けるという条件から $\Omega \subsetneqq E(\Omega)$ である。従って $\partial\Omega \cap E(\Omega) \ni P$ が存在する。このとき、定理(2.6)より、任意の座標系に関して適当な $g$ を取り、それに対応する、補題(2.5)の $\{\omega_{n-w}(K_g) \in \Gamma(\Omega, \mathcal{E}^{0,n-w})\}$ を求めれば、 $P \notin E(\Omega)$ となり矛盾が生ずる。従って $g$ の取り方がわかればよい。それには、整数 $t > \max_{1 \leq q \leq n-1} \dim H^q(\Omega, \mathcal{O})$ とし、更に、整数 $R > \max(n, t)$ を取る。 $1 \leq p \leq R$ に対して、 $\dfrac{1}{z_1 \cdots z_{n-1} z_n{}^p}$ に対応する $\bar\partial$-閉形式を $\alpha_p^*(1,\cdots,n)$

とすれば $\alpha_\rho^*(1,\cdots,n)|_\Omega \in \Gamma(\Omega, \mathcal{E}^{0,n-1})$ である。

(1) $\dim H^{n-1}(\Omega, \mathcal{O}) < t$ より

$$\sum_{\rho=(\tau_1-1)t+1}^{\tau_1 t} a_\rho^1 \alpha_\rho^*(1,\cdots,n) = \bar{\partial}\omega_{\tau_1, n-2}(\phi)$$

となる $(a_\rho^1) \neq 0$ と $\omega_{\tau_1, n-2}(\phi)$ が存在する。そこで

$$g_{\tau_1} \equiv \sum_{\rho=(\tau_1-1)t+1}^{\tau_1 t} \frac{a_\rho^1}{z_1 \cdots z_{n-1} z_n^\rho}$$

とおけば (2.5) の ii) が満たされる。

(2) (2.5) の iii) のように $\gamma_{\tau_1}(1) \in \Gamma(\Omega, \mathcal{E}^{0,n-2})$ を定義すれば、これは $\bar{\partial}$-閉型式になり、$\dim H^{n-2}(\Omega, \mathcal{O}) < t$ より

$$\sum_{\tau_1=(\tau_2-1)t+1}^{\tau_2 t} a_{\tau_1}^2 \gamma_{\tau_1}(1) = \bar{\partial}\omega_{\tau_2, n-3}(1)$$

となる $(a_{\tau_1}^2) \neq 0$ と $\omega_{\tau_2, n-3}(1) \in \Gamma(\Omega, \mathcal{E}^{0,n-3})$ が存在する。そこで

$$g_{\tau_2} \equiv \sum_{\tau_1=(\tau_2-1)t+1}^{\tau_2 t} a_{\tau_1}^2 \omega_{\tau_1, n-2}(\phi),$$

$$\omega_{\tau_2, n-2}(\phi) \equiv \sum_{\tau_1} a_{\tau_1}^2 \omega_{\tau_1, n-2}(\phi)$$

とおき、$\gamma_{\tau_2}(1)$ を (2.5) のように定義すれば $\alpha_{g_{\tau_2}}^*$ に対して (2.5) の ii), iii) が満たされる。

(3) $\gamma_{\tau_2}(2)$ を (2.5) のように定義すれば、同様に

$$\sum_{\tau_2=(\tau_3-1)t+1}^{\tau_3 t} a^3_{\tau_2}\,\gamma_{\tau_2}(2) = \bar\partial\,\omega_{\tau_3,\,n-2}(\phi)$$

となる $(a^3_{\tau_2}) \neq 0$ と $\omega_{\tau_3,n-2}(\phi) \in \Gamma(\Omega, \mathcal{E}^{0,n-3})$ が存在する。

$$g_{\tau_3} \equiv \sum_{\tau_2=(\tau_3-1)t+1}^{\tau_3 t} a^3_{\tau_2}\, g_{\tau_2},$$

$$\omega_{\tau_3,\,n-2}(\phi) \equiv \sum_{\tau_2} a^3_{\tau_2}\,\omega_{\tau_2,\,n-2}(\phi),$$

$$\omega_{\tau_3,\,n-1}(1) \equiv \sum_{\tau_2} a^3_{\tau_2}\,\omega_{\tau_2,\,n-3}(1)$$

とおき、$\gamma_{\tau_3}(1)$, $\gamma_{\tau_3}(2)$ を (2.5) のように定義すれば $\{\partial^* g_{\tau_3}\}$ に対して、(2.5) の ii), iii) が成立する。

以下同様にして、順次 $g_{\tau_i}$ を取り直し、最後のもの $\left(i = \sum_0^{n-2}\binom{n-1}{r} = 2^{n-1}-1\right)$ を $g$ とすれば、$\{\partial^* g\}$ に対応して (2.5) の ii), iii) を満たす $\{\omega\}$ が得られる。(証明終)

## §3. Serre の定理の一般化

$\mathbb{C}^n$ に於て

$$D \equiv \{ w \in \mathbb{C}^n \mid |w_1| \leq 1,\ |w_j| < 1\ (2 \leq j \leq n) \},$$

$$\delta D \equiv \{ w \in D \mid |w_1| = 1 \}$$

とおく。 $\mathbb{C}^n$ の開集合 $\Omega$ に対して、$\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ の上への双正則写像 $\varphi$ は次の条件を満たすとき、$\Omega$ の境界写像といわれる：

i)
$$\varphi(D) \subset \Omega, \quad \varphi(D) \not\subset \Omega.$$

ii)
$$\varphi(\delta D) \subset\subset \Omega.$$

$\Omega$ が境界写像をもたないとき、P-凸 といわれる。

$n$ 次元複素多様体 $M$ の開集合 $\Omega$ が境界点 $x \in \partial\Omega$ で $p^*$-凸 であるとは、$x$ の、$M$ 内のある近傍 $V$ から $\mathbb{C}^n$ の適当な多重円板 $\Delta$ の上への双正則写像 $\psi$ で、$\psi(\Omega \cap V)$ が $\mathbb{C}^n$ で $p$-凸 であるときをいう。$\Omega$ の全ての境界点で $p^*$-凸 のとき、$\Omega$ を単に $p^*$-凸 という。

(3.1) <u>補題</u> Stein 多様体の $p^*$-凸 領域は Stein 多様体である。

証明 講究録のこの巻の梶原[4] の補題2 を参照。

$\mathbb{C}^2$ に於て、適当な正数 $r>0$ に対して

$$\Delta \equiv \{ z \in \mathbb{C}^2 \mid |z_i| < r \quad (i=1,2) \},$$

$$U_i \equiv \{ z \in \Delta \mid z_i \neq 0 \} \quad (i=1,2)$$

とおくと、 $U_1 \cup U_2 = \Delta - 0$ である。Thullen の領域 $\Delta - 0$ の消滅しないコホモロジー類に関して、講究録のこの巻の梶原[4] の補題 5, 6, 10 から、証明なしに、次の二つの結果を引用する。

(3.2) <u>命題</u> $L$ を $m$ 次元の可換な複素 Lie 群とし、$\exp : \mathbb{C}^m \to L$ を、$L$ の Lie 環 $\mathbb{C}^m$ から $L$ への指数写像とする。このとき、$\mathbb{C}^m \ni X \neq 0$ に対して、$U_1 \cap U_2$ 上で

$$\exp\left(\frac{1}{z_1 z_2} X\right) = g_2 g_1^{-1}$$

となる $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_L)$ $(i=1,2)$ は存在しない。

(3.3) <u>命題</u> $B$ を零でない $(m,m)$ 行列とするとき、次のような $G_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})})$ $(i=1,2)$ は存在しない：

1) $B$ が少くとも一つ $0$ でない固有値をもつとき、$U_1 \cap U_2$ 上で

$$\exp\left(\frac{1}{z_1 z_2} B\right) = G_2 G_1^{-1}.$$

2) $B$ の固有値が全て $0$ のとき、$U_1 \cap U_2$ 上で

$$\exp\left[\left(\exp\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\alpha^*(z_1, z_2)\right)B\right] = G_2 G_1^{-1}.$$

ここで $\alpha^*$ は恒等的には $0$ でない $U_1 \cup U_2$ 上の正則関数とする。

$L$ を適当な $m$ 次元複素 Lie 群とし、$\mathbb{C}^n$ に於て、原点を境界点にもち、更に、$H^1(\Omega, \mathcal{O}_L) = 0$, $H^q(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ $(2 \leq q \leq n-1)$ を満たす領域 $\Omega$ を考える。

$$\Omega_i \equiv \{ z \in \Omega \mid z_i \neq 0 \} \quad (1 \leq i \leq n)$$

とおけば、$\mathcal{U} \equiv \{\Omega_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ は $\Omega$ の開被覆になる。

2複素変数 $z_1, z_2$ のみの関数で、$\Omega_1 \cap \Omega_2$ 上で正則なものを $f(z_1, z_2)$ と書くとき、

$$\frac{h(z_1, z_2)}{z_3 \cdots z_n} \in \Gamma(\Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_n, \mathcal{O})$$

であるから，これは $Z^{n-1}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ の元を定義する。

$H^{n-1}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ だから，次の性質をもつ $\mathfrak{W}$ の細分 $\mathfrak{U} = \{ U_\alpha \mid \alpha \in A \}$ が存在する：

1) $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ （素合併）で，$1 \leqq i \leqq n$ に対して $\{ U_{\alpha_i} \mid \alpha_i \in A_i \}$ は $\Omega_i$ の Stein 被覆となる。

従って

$$H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \approx H^q(\Omega, \mathcal{O}) = 0 \quad (2 \leqq q \leqq n-1), \quad H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = 0.$$

2) ある $(f_{\alpha_1 \cdots \hat{\alpha}_j \cdots \alpha_n}) \in C^{n-2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ が存在して

$$\left( \frac{h}{z_3 \cdots z_n} \right) = \delta ( f_{\alpha_1 \cdots \hat{\alpha}_j \cdots \alpha_n} )$$

となる。即ち，$\alpha_i \in A_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ に対しては $U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$ 上

$$\frac{h}{z_3 \cdots z_n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} f_{\alpha_1 \cdots \hat{\alpha}_j \cdots \alpha_n},$$

$\alpha_i^{(s)} \in A_i$ $(p_{i-1} + 1 \leqq s \leqq p_i,\ 1 \leqq i \leqq q\,(\leqq n-1),\ 1 \leqq p_1 < \cdots < p_q = n)$ に対しては $U_{\alpha_1^{(1)}} \cap \cdots \cap U_{\alpha_1^{(p_1)}} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q^{(p_{q-1}+1)}} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q^{(p_q)}}$ 上

$$0 = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} f_{\alpha_1^{(1)} \cdots \alpha_1^{(p_1)} \cdots \hat{\alpha}_i^{(s)} \cdots \alpha_q^{(p_{q-1}+1)} \cdots \alpha_q^{(p_q)}}.$$

(3.4) 補題　任意の $\{k_1,\cdots,k_{q-1}\}\subset\{3,\cdots,n\}$ に対して次のような $(f^{(k_1\cdots\hat{k}_j\cdots k_{q-1})}_{\cdots\cdots})\in C^{n-q}(\mathfrak{U},\mathcal{O})$ が存在すると仮定する:

i)
$$\left(\frac{h}{z_3\cdots z_n}\right)=\delta(f_{\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_q\cdots\alpha_n})$$

ii)
$$(F^{(k_1\cdots k_{q-1})}_{\cdots\cdots})\equiv\sum_{j=1}^{q-1}(-1)^j z_{k_j}(f^{(k_1\cdots\hat{k}_j\cdots k_{q-1})}_{\cdots\cdots})-(-1)^{q+k_1+\cdots+k_{q-1}}\frac{h}{z_3\cdots\hat{z}_{k_1}\cdots\hat{z}_{k_{q-1}}\cdots z_n}$$

と定義するとき

$$(F^{(k_1\cdots k_{q-1})}_{\cdots\cdots})=\delta(f^{(k_1\cdots k_{q-1})}_{\cdots\cdots})\qquad(2\leq q\leq s\leq n-1).$$

このとき

$$(F^{(k_1\cdots k_{q-1})}_{\cdots\cdots})\in Z^{n-q}(\mathfrak{U},\mathcal{O})\qquad(2\leq q\leq s+1).$$

証明.　$q=2$ のとき，$\alpha_i\in A_i\ (1\leq i\leq n)$ なる $U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_n}$ 上で

$$\delta(F^{(k_1)}_{\cdots})_{\alpha_1\cdots\alpha_n}=\sum_{j\neq k_1}(-1)^{j-1}(-z_{k_1}f_{\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha_n})$$

$$+(-1)^{k_1-1}\left(-z_{k_1}f_{\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_{k_1}\cdots\alpha_n}-(-1)^{2+k_1}\frac{h}{z_3\cdots\hat{z}_{k_1}\cdots z_n}\right)$$

$$=-z_{k_1}\left\{\delta(f_{\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha_n})_{\alpha_1\cdots\alpha_n}-\frac{h}{z_3\cdots z_n}\right\}=0,$$

$\alpha_i^{(s)}\in A_i\ (p_{i-1}+1\leq s\leq p_i,\ 1\leq i\leq q\,(\leq n-1),\ 1\leq p_1<\cdots<p_q=n)$ なる

$U_{\alpha_1^{(1)}} \cap \cdots \cap U_{\alpha_1^{(p_1)}} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q^{(p_{q-1}+1)}} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q^{(p_q)}}$ 上では

$$\delta(F^{(k_1)}_{\cdots})_{\alpha_1^{(1)}\cdots\alpha_q^{(p_q)}} = -z_{k_1}\,\delta(f_{\cdots\cdots})_{\alpha_1^{(1)}\cdots\alpha_q^{(p_q)}} = 0 .$$

故に

$$(F^{(k_1)}_{\cdots\cdots}) \in Z^{n-2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) .$$

$q>2$ のとき，例えば $\alpha_i \in A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-q+2)$ なる $U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_{n-q+2}}$ 上で

$$\delta(F^{(\alpha_{n-q+2}\cdots\alpha_n)}_{\cdots\cdots})_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-q+2}}$$

$$= \sum_{l=n-q+2}^{n} (-1)^{l-(n-q+1)} z_{\alpha_l}\,\delta(f^{(\alpha_{n-q+2}\cdots\hat{\alpha}_l\cdots\alpha_n)}_{\cdots\cdots})_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-q+2}}$$

$$+ (-1)^{q-1+(n-q+1)+\cdots+n} \frac{h}{z_3\cdots z_{n-q+1}}$$

$$= -z_{\alpha_{n-q+2}} \left\{ \sum_{m=n-q+3}^{n} (-1)^{m-(n-q+2)} z_{\alpha_m} f^{(\alpha_{n-q+3}\cdots\hat{\alpha}_m\cdots\alpha_n)}_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-q+2}} - (-1)^{q-1+(n-q+3)+\cdots+n} \frac{h}{z_3\cdots z_{n-q+2}} \right\}$$

$$+ \sum_{l \geqslant n-q+3} (-1)^{l-(n-q+1)} z_{\alpha_l} \left\{ \sum_{m=n-q+2}^{l-1} (-1)^{m-(n-q+1)} z_{\alpha_m} f^{(\alpha_{n-q+2}\cdots\hat{\alpha}_m\cdots\hat{\alpha}_l\cdots\alpha_n)}_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-q+2}} \right.$$

$$\left. + \sum_{m=l+1}^{n} (-1)^{m-(n-q+2)} z_{\alpha_m} f^{(\alpha_{n-q+2}\cdots\hat{\alpha}_l\cdots\hat{\alpha}_m\cdots\alpha_n)}_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-q+2}} \right\}$$

$$+(-1)^{q-1+(n-q+1)+\cdots+n}\,\frac{h}{z_3\cdots z_{n-q+2}} = 0\,.$$

その他の場合も同様に調べることができる。故に

$$(F^{(k_1\cdots k_{q-1})}_{\cdots\cdots}) \in Z^{n-q}(\mathfrak{U},\mathcal{O})\,. \quad \text{(証明終)}$$

そこで $(F^{(k_1)}_{\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha_n})$ を補題(3.4), ii) のように定義すれば $(F^{(k_1)}_{\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha_n}) \in Z^{n-2}(\mathfrak{U},\mathcal{O})$.
$H^{n-2}(\mathfrak{U},\mathcal{O})=0$ だから、ある $(f^{(k_1)}_{\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_{j_1}\cdots\hat{\alpha}_{j_2}\cdots\alpha_n}) \in C^{n-3}(\mathfrak{U},\mathcal{O})$ が存在して

$$(F^{(k_1)}_{\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_j\cdots\alpha_n}) = \delta(f^{(k_1)}_{\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_{j_1}\cdots\hat{\alpha}_{j_2}\cdots\alpha_n})$$

となる。そこで更に $(F^{(k_1k_2)}_{\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_{j_1}\cdots\hat{\alpha}_{j_2}\cdots\alpha_n})$ を補題(3.4), ii) のように定義すれば、これは又、コサイクルになるから、$H^{n-3}(\mathfrak{U},\mathcal{O})=0$ より、これはある $(f^{(k_1k_2)}_{\alpha_1\cdots\hat{\alpha}_{j_1}\cdots\hat{\alpha}_{j_3}\cdots\alpha_n}) \in C^{n-4}(\mathfrak{U},\mathcal{O})$ のコバウンダリーとなる。以下、この操作を続けて $(F^{(3\cdots n)}_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})$ を得る。即ち $\alpha_i \in A_i$ $(i=1,2)$ なる $U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}$ 上では

$$F^{(3\cdots n)}_{\alpha_1\alpha_2} = \sum_{j=3}^{n}(-1)^j z_j\, f^{(3\cdots\hat{j}\cdots n)}_{\alpha_1\alpha_2} - (-1)^{n-1+(3+\cdots+n)}\, h \in \Gamma(U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2},\mathcal{O}),$$

$\alpha_i, \alpha_i' \in A_i$ $(i=1,2)$ なる $U_{\alpha_i}\cap U_{\alpha_i'}$ 上では

$$F^{(3\cdots n)}_{\alpha_i\alpha_i'} = \sum_{j=3}^{n} (-1)^j z_j \, f^{(3\cdots\hat{j}\cdots n)}_{\alpha_i\alpha_i'}$$

(3.5) 定理　$n$ 次元 Stein 多様体 $S$ の領域 $\Omega$ が、ある複素 Lie 群 $L$ に対して $H^1(\Omega, \mathcal{O}_L) = 0$ であり、更に $H^q(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ $(2 \leq q \leq n-1)$ であるならば、$\Omega$ は Stein 多様体である。

証明　補題(3.1)により、$\Omega$ が $p^*$-凸 であることを示せばよい。$\Omega$ が、ある境界点 $x_0 \in \partial\Omega$ で $p^*$-凸 でないと仮定する。$S$ は Stein 多様体だから、次のような正則関数 $\psi_i \in \Gamma(S, \mathcal{O})$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在する:

1) $\psi_i(x_0) = 0$

2) 適当な正数 $A > 0$ に対して、$V$ を

$$\{ x \in S \mid |\psi_i(x)| < A \quad (1 \leq i \leq n) \}$$

の $x_0$ を含む連結成分とするとき、$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ は $V$ で座標系をなす。

$\psi : S \longrightarrow \mathbb{C}^n$ なる写像を

$$\psi(x) = (z_1, \ldots, z_n) \equiv (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))$$

で定義すると、$\psi$ は $V$ から、$\mathbb{C}^n$ の多重円板

$$\psi(V) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| < A \quad (1 \leq i \leq n) \}$$

の上への、正則な同型対応を与える。

$\Omega$ は $x_0$ で $p^*$-凸 でないから、$\psi(\Omega \cap V)$ は $\mathbb{C}^n$ で $p$-凸 でない。従って、複素変数 $w_1, \ldots, w_n$ の空間 $\mathbb{C}^n$ から、複素変数 $z_1, \ldots, z_n$ の空間 $\mathbb{C}^n$ の上への双正則写像 $\varphi$ と、正数 $\varepsilon > 0$ で、次の性質を持つものが存在する：

1) $$D \equiv \{ w \in \mathbb{C}^n \mid |w_i| < 1 \quad (1 \leq i \leq n) \}$$

$$\cup \{ w \in \mathbb{C}^n \mid 1 - 2\varepsilon < |w_1| < 1 + 2\varepsilon, \ |w_j| < 1 + 2\varepsilon \ ( 2 \leq j \leq n) \}$$

とおくとき、

$$\varphi(D) \subset \psi(\Omega \cap V)$$

2) $$E \equiv \{ w \in \mathbb{C}^n \mid |w_i| < 1 + 2\varepsilon \quad (1 \leq i \leq n) \}$$

とおくとき、

$$\varphi(E) \subset \psi(V)$$

3) $|a_1| \leq 1-2\varepsilon$, $|a_j| = 1$ $(2 \leq j \leq n)$ かつ $\varphi(a) \in \partial\psi(\Omega \cap V)$

となる $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ が存在する。

$$W(x) = (w_1(x), \ldots, w_n(x)) \equiv \varphi^{-1} \circ \psi(x)$$

とおくことにより、更び $V$ で座標系をなす関数

$w_i \in \Gamma(S, \mathcal{O})$ $(1 \leq i \leq n)$ を得る。

$$T \equiv \{ x \in S \mid |w_j(x)| < 1+2\varepsilon \ (2 \leq j \leq n) \}$$

を考え、$T_0$ を

$$\{ x \in T \mid |w_1(x)| < 1+2\varepsilon \}$$

の $V$ に含まれる連結成分とする。更に

$$T_1 \equiv \{ x \in T \mid |w_1(x)| > 1+\varepsilon \} \cup \{ x \in T - T_0 \mid |w_1(x)| < 1+2\varepsilon \}$$

とすれば、$\mathcal{J} \equiv \{ T_0, T_1 \}$ は $T$ の開被覆となり、

関数

$$\frac{1}{w_1(x) - a_1} \in \Gamma(T_0 \cap T_1, \mathcal{O})$$

は $Z^1(\mathcal{J}, \mathcal{O})$ の元を定義する。$T$ は Stein 多様体だから

$T_0 \cap T_1$ で

$$\frac{1}{w_1(x)-a_1} = \xi_1(x) - \xi_0(x)$$

を満たす関数 $\xi_i \in \Gamma(T_i, \mathcal{O})$ $(i=0,1)$ が存在する。

$$\xi(x) \equiv \begin{cases} \xi_1(x) & \text{in } T_1 \\ \dfrac{1}{w_1(x)-a_1} + \xi_0(x) & \text{in } T_0 \end{cases}$$

と定義すれば、$\xi(x)$ は $T$ 上で矛盾なく定義された有理型関数となる。

$$\Omega_1 \equiv \{x\in\Omega\cap T_0 \mid w_1(x)\neq a_1\} \cup [\Omega\cap(T-T_0)] \subset T,$$

$$\Omega_j \equiv \{x\in\Omega \mid w_j(x)\neq a_j\} \quad (2\leq j\leq n)$$

のように $\Omega_i$ を取れば $\mathfrak{W} \equiv \{\Omega_i \mid 1\leq i\leq n\}$ は $\Omega$ の開被覆になる。

$T$ で有理型、$\Omega_1\cap\Omega_2$ で正則な関数 $h$ に対して、

$\Omega_1\cap\cdots\cap\Omega_n$ 上で

$$\eta(x) \equiv \frac{h(x)}{(w_3(x)-a_3)\cdots(w_n(x)-a_n)}$$

と定義すれば

$$\eta \in \Gamma(\Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_n, \mathcal{O}) = Z^{n-1}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}).$$

$H^{n-1}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ だから、次のような $\mathfrak{W}$ の細分

$\mathfrak{U} = \{ U_\alpha \mid \alpha \in A \}$ が存在する:

1) $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ (素合併) で、$1 \leq i \leq n$ に対して

$\{ U_{\alpha_i} \mid \alpha_i \in A_i \}$ は $\Omega_i$ の Stein 被覆である。

従って

$$H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \approx H^q(\Omega, \mathcal{O}) = 0 \quad (2 \leq q \leq n-1),\ H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_L) = 0 .$$

2) ある $(f_{\alpha_1 \cdots \hat{\alpha}_j \cdots \alpha_n}) \in C^{n-2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ が存在して

$$(\eta(x)) = \delta\left(f_{\alpha_1 \cdots \hat{\alpha}_j \cdots \alpha_n}(x)\right).$$

このとき、$\mathbb{C}^n$ に於けると同様の議論で $\alpha_i \in A_i\ (i=1,2)$

なる $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ 上で

$$F^{(3\cdots n)}_{\alpha_1\alpha_2}(x) = \sum_{j=3}^{n} (-1)^j (w_j(x) - a_j) f^{(3\cdots \hat{j} \cdots n)}_{\alpha_1\alpha_2}(x) - (-1)^{n-1+(3+\cdots+n)} h(x) \in \Gamma(U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}, \mathcal{O}),$$

$\alpha_i, \alpha_i' \in A_i\ (i=1,2)$ なる $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_i'}$ 上で

$$F^{(3\cdots n)}_{\alpha_i\alpha_i'}(x) = \sum_{j=3}^{n} (-1)^j (w_j(x) - a_j) f^{(3\cdots \hat{j} \cdots n)}_{\alpha_i\alpha_i'}(x) \in \Gamma(U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_i'}, \mathcal{O})$$

となる $\left(F^{(3\cdots n)}_{\alpha\beta}(x)\right) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ を得る。

Lie 群 $L$ の Lie 環を $\mathfrak{L}$ とし、$\mathrm{ad}: \mathfrak{L} \to \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$

をその随伴表現とする。 $\exp: \mathcal{L} \to L$ は正則な準同型だから、$\mathcal{L} \ni X$ に対して

$$\exp\left(F_{\alpha\beta}^{(3\cdots n)}(x) X\right) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{O}_L).$$

$H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{O}_L) = 0$ だから $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で

$$\exp\left(F_{\alpha\beta}^{(3\cdots n)}(x) X\right) = g_\beta(x)\, g_\alpha(x)^{-1}$$

となる $(g_\alpha(x)) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{O}_L)$ が存在する。

$$P \equiv \{ x \in S \mid w_3(x) - a_3 = \cdots = w_n(x) - a_n = 0 \}$$

とおくとき、$U_\alpha \cap U_{\alpha'} \cap P$ 上で $F_{\alpha\alpha'}^{(3\cdots n)}(x) = 0$ となるから $g_\alpha(x) = g_{\alpha'}(x)$ 、従って $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap P$ 上で

$$F_{12}(x) \equiv F_{\alpha_1\alpha_2}^{(3\cdots n)}(x) = (-1)^{n+(3+\cdots+n)} h(x)$$

とおき、$\Omega_i \cap P$ $(i=1,2)$ 上で

$$g_i(x) \equiv g_{\alpha_i}(x)$$

とおけば、これらは全て矛盾なく定義され、$F_{12}(x) \in \Gamma(\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap P, \mathfrak{Q})$, $g_i(x) \in \Gamma(\Omega_i \cap P, \mathfrak{O}_L)$. 更に $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap P$ 上で

$$\exp\left(F_{12}(x) X\right) = g_2(x)\, g_1(x)^{-1}$$

が成立する。

$\mathbb{C}^2$ に於て、開集合

$$E_1 \equiv \{ w \in \mathbb{C}^2 \mid |w_1| < 1+2\varepsilon,\ |w_2| < 1,\ w_1 \neq a_1 \}$$

$$\cup \{ w \in \mathbb{C}^2 \mid 1-2\varepsilon < |w_1| < 1+2\varepsilon,\ |w_2| < 1+2\varepsilon \},$$

$$E_2 \equiv \{ w \in \mathbb{C}^2 \mid |w_1| < 1+2\varepsilon,\ |w_2| < 1 \}$$

$$\cup \{ w \in \mathbb{C}^2 \mid 1-2\varepsilon < |w_1| < 1+2\varepsilon,\ |w_2| < 1+2\varepsilon,\ w_2 \neq a_2 \}$$

を考える。更に、$\imath : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ を

$$\imath(w_1, w_2) \equiv (w_1, w_2, 0, \cdots, 0)$$

で定義すれば

$$(\psi|_V)^{-1} \circ \varphi \circ \imath(E_i) \subset \Omega_i \cap P \quad (i=1,2),$$

$$(\psi|_V)^{-1} \circ \varphi \circ \imath(E_1 \cup E_2) \subset T_0$$

が成り立つ。更に

$$\Delta \equiv \{ w \in \mathbb{C}^2 \mid |w_i| < 1+2\varepsilon \ \ (i=1,2) \},$$

$$U_i \equiv \{ w \in \Delta \mid w_i \neq a_i \} \quad (i=1,2)$$

とおく。

(1) $L$ が可換のとき $h$ として特に

$$(-1)^{n+(3+\cdots+n)} \frac{\xi(x)}{w_2(x)-a_2} \in \Gamma(T, \mathcal{M}) \cap \Gamma(\Omega_1 \cap \Omega_2, \mathcal{O})$$

を取る。ここで $\mathcal{M}$ は有理型関数の芽の層を表わす。

$$F_{12}(w) \equiv F_{12} \circ (\psi|_V)^{-1} \circ \varphi \circ \iota \in \Gamma(E_1 \cap E_2, \mathcal{O})$$

$$g_1(w) \equiv g_1 \circ (\psi|_V)^{-1} \circ \varphi \circ \iota \in \Gamma(E_1, \mathcal{O}_L)$$

$$g_2(w) \equiv g_2 \circ (\psi|_V)^{-1} \circ \varphi \circ \iota \left[ \exp\left( \frac{\xi_0 \circ (\psi|_V)^{-1} \circ \varphi \circ \iota}{w_2 - a_2} X \right) \right] \in \Gamma(E_2, \mathcal{O}_L)$$

とおけば、$E_1 \cap E_2$ 上で

$$\exp\left( \frac{1}{(w_1-a_1)(w_2-a_2)} X \right) = g_2(w) g_1(w)^{-1}$$

が成り立つ。$g_i$ は $U_i$ 上に拡張できる $(i=1,2)$ (講究録のこの巻の梶原[4] の補題11の(1)の証明参照)。$\Delta$ は $(a_1, a_2)$ の開近傍で $U_1 \cup U_2 = \Delta - \{(a_1, a_2)\}$ だから、これは命題(3.2)に矛盾する。

(2) $L$ が非可換で、ある $X \in \mathcal{L}$ に対して $(m, m)$ 行列

$B = \mathrm{ad}\, X$ が少くとも一つ $0$ でない固有値をもつとき（$L$ は非可換だから，$B = \mathrm{ad}\, X$ が零行列でないものが存在する），$h$ を(1)と同様に取れば，$\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2$ 上で

$$\exp\left(\frac{1}{(w_1 - a_1)(w_2 - a_2)} B\right) = \mathrm{Ad}\left(\exp\left(\frac{1}{(w_1 - a_1)(w_2 - a_2)} X\right)\right) = G_2(w) G_1(w)^{-1}$$

が成り立つ。ここで，$\mathrm{Ad} : L \longrightarrow GL(m, \mathbb{C})$ は Lie 群 $L$ の随伴表現で，

$$G_i(w) \equiv \mathrm{Ad}\ g_i(w) \in \Gamma(\mathbb{E}_i, \mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})}) \quad (i=1,2)$$

とおいた。先程のようにして，$G_i$ の各成分が $U_i$ 上に拡張できるから，$G_i$ 自身が $U_i$ 上に拡張される。これは命題(3.3)に矛盾する。

(3) $L$ が非可換で，$B$ の固有値が全て $0$ のとき，

$$h(x) \equiv (-1)^{n+(3+\cdots+n)} \exp\left(\xi(x) + \frac{1}{w_2(x) - a_2}\right) \in \Gamma(T, \mathfrak{M}) \cap \Gamma(\Omega_1 \cap \Omega_2, \mathcal{O})$$

を取る。$\mathcal{O}^*$ を値 $0$ を取らない正則関数の芽の層として

$$\alpha^*(w) \equiv \exp\left(\xi_0 \circ (\psi|_V)^{-1} \circ \varphi \circ \iota\right) \in \Gamma(\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2, \mathcal{O}^*),$$

$$F_{12}(w) \equiv \exp\left(\frac{1}{w_1 - a_1} + \frac{1}{w_2 - a_2}\right) \alpha^*(w) \in \Gamma(\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2, \mathcal{O}),$$

$$g_i(w) \equiv g_i \circ (\Psi_V)^{-1} \circ \varphi \circ \tau \in \Gamma(\mathbb{E}_i, \mathcal{O}_L)$$

とおけば、$\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2$ 上で

$$\exp\left(F_{12}(w) X\right) = g_2(w)\, g_1(w)^{-1}$$

が成立する。従って、$\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2$ 上で

$$\exp\left[\left(\exp\left(\frac{1}{w_1 - a_1} + \frac{1}{w_2 - a_2}\right) \alpha^*(w)\right) B\right] = G_2(w)\, G_1(w)^{-1}$$

となり、$G_i = \mathrm{Ad}\ g_i \in \Gamma(\mathbb{E}_i, \mathcal{O}_{GL(m,\mathbb{C})})$ が $U_i$ 上に拡張できることから、更び、命題(3.3)に矛盾する。(証明終)

# 参 考 文 献


1. A. Andreotti - H. Grauert, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France, 90(1962), 193-259.

2. H. Cartan, Séminaires E. N. S., (1951/1952)(mimeographed).

3. F. Docquier - H. Grauert, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 140(1960), 94-123.

4. 梶原壌二, コホモロジー類が消滅する2次元の複素多様体について, 数理解析研究所講究録, Cousinの問題 1972年.

5. J. Kajiwara - H. Kazama, Two dimensional complex manifolds with vanishing cohomology sets, (to appear).

6. H. B. Laufer, On sheaf cohomology and envelopes of holomorphy , Ann. of Math. (2) 84(1966), 102-118.

7. G. Scheja, Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen, Math. Ann., 144, 1961, 345-360.

8. J. P. Serre, Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Colloque sur les Fonctions de Plusieurs Variables, Brussels, 1953, 57-86.